Colle du 06/04 - Sujet 1
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer le théorème du rang.

Exercice 1. Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & 2P + X^2P'' + P(0) \end{array}$. Montrer que φ est un endomorphisme. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. Montrer que si H est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ alors $g : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme.
2. Réciproquement si H est un sous-espace vectoriel de E et si $g : \begin{array}{ccc} H & \to & \mathrm{Im}(f) \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ est un isomorphisme, montrer que $H \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

Colle du 06/04 - Sujet 2
Applications linéaires

Question de cours. Démontrer que l'image directe d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Exercice 1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{array}{c} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AMA^T \end{array}$. Montrer que f est un endomorphisme et déterminer son noyau et son image.

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel et p et q deux projecteurs tels que et $p \circ q = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On pose $r = p + q - q \circ p$.

1. Justifier que $r \in \mathscr{L}(E)$ et montrer que $r^2 = r$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q)$ puis que $\mathrm{Im}(r) = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q)$.

Colle du 06/04 - Sujet 3
Applications linéaires

Question de cours. Montrer que l'image d'une base est libre si et seulement si...

Exercice 1. Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P'' \end{array}$. Montrer que φ est un isomorphisme.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(u)$ tel que $u^3 + 2u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
2. On pose $\tilde{u} = u_{|\mathrm{Im}(u)}$. Que peut-on dire de $\tilde{u}$?